Άσκηση 16

$$P=\begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\overset{\curvearrowright}{0}$: άρα 0 απορροφητική

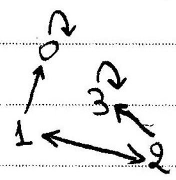
$\overset{\curvearrowright}{3}$: άρα 3 —||—

Επειδή είναι πίνακας μετάβασης (γραμμή 2) γίνεται $p+q=1$

1 κ 2 δεν είναι κλειστό κύκλωμα!

$1 \to 0$ αλλά $0 \not\to 1$

1 κ 2 κλάση επικοινωνούντων καταστάσεων



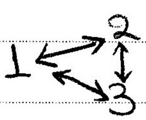
Η κατάσταση 1 είναι παροδική ($1 \to 0$ αλλά $0 \not\to 1$)

Επίσης, η 2 είναι παροδική ($2 \to 3$ αλλά $3 \not\to 2$)

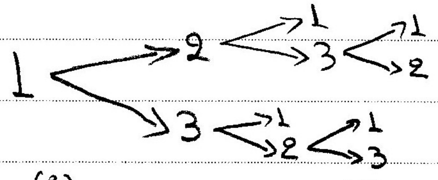
Άσκηση 17

$E=\{1,2,3\}$

$$P=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & p \\ p & q & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



Είναι μη διαχωρίσιμη Μ.Α. (όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους)
πεπερασμένο πλ. καταστάσεων άρα
είναι θετικώς επαναληπτική.
Υπάρχουν οι οριακές πιθανότητες (Μ.Α. μη διαχωρίσιμη κ εργοδική)



$\pi = \pi P$

$\pi_0 + \pi_1 = 1$

$P_{11}^{(2)} > 0$ κ $P_{11}^{(3)} > 0$ $\quad d_1 = \text{ΜΚΔ}\{2,3,\dots\} = 1$

Όλες οι καταστάσεις είναι ίδιου τύπου άρα είναι πίνακας με περίοδο 1.

Χρησιμοποιώ Θ. Foster:

$\pi = \pi P$

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

$(\Pi_1\ \Pi_2\ \Pi_3) = (\Pi_1\ \Pi_2\ \Pi_3)\, P$

$\Pi_1 = \Pi_2 q + \Pi_3 p$

$\Pi_2 = \Pi_1 p + \Pi_3 q$

$\Pi_3 = \Pi_1 q + \Pi_2 p$

$\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1$

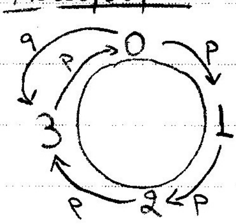
$p + q = 1$

Βγαίνει προφανώς: $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \frac{1}{3}$

Ασκ 1, 2, 3, 8, 10 να την διαβάσουμε

Ασκ 4, 5, 6, 7, 14 την έχουμε κάνει

<u>Άσκηση 9</u>



Α.Τ.Π.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$P(X_2=3) = ;$

$p^{(0)} = \left(P(X_0=0)\ \ P(X_0=1)\ \ P(X_0=2)\ \ P(X_0=3)\right) \Longrightarrow$ ισοπίθανα

$p^{(0)} = \left(\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{4}\right)$

1ος τρόπος

θα πρέπει ν.δ.ο. $p^{(n)} = p^{(0)} P^n$

$P(X_2=3) = p^{(0)} P_3^2$

2ος

$P(X_2=3) = p_0^{(0)} p_{03}^{(2)} + p_1^{(0)} p_{13}^{(2)} + p_2^{(0)} p_{23}^{(2)} + p_3^{(0)} p_{33}^{(2)}$

$p_{03}^{(2)} = P\left(0 <^{\to 1 \to 3}_{\to 3 \to 3}\right) = 0$

$p_{13}^{(2)} = P\left(1 <^{\to 0 \to 3}_{\to 2 \to 3}\right) = q^2 + p^2$

$\vdots$

Βρίσκω τις $p_{23}^{(2)}$ και $p_{33}^{(2)}$

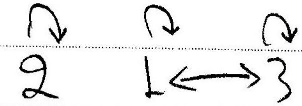
Ξέρω τις $p_0^{(0)}, \dots, p_3^{(0)}$

και βρίσκω το αποτέλεσμα

Άσκηση 13

$E = \{1, 2, 3\}$

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & p & 0 & q \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & q & 0 & p \end{array}$$

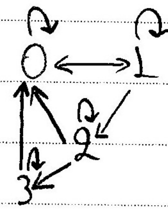


2: απορροφητική

1, 3: αποτελούν κλειστό κύκλωμα και θετ. επαναλ.

Ασκ. 18

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/24 & 7/8 & 1/12 & 0 \\ 2 & 1/36 & 0 & 8/9 & 1/12 \\ 3 & 1/8 & 0 & 0 & 7/8 \end{array}$$



Θέλω να βρω οριακές πιθανότητες

Άρα έχω μη διαχωρίσιμη Μ.Α.

πεπερ. καταστ. ⇒ θετ. επαναλ.

περίοδος 1 ⇒ εργοδική

μας ζητάει το μ_0 άρα $\mu_0 = \frac{1}{\pi_0}$

Ασκ. 19, 23, 24 έχουμε κάνει.

Ασκ. 21 ΟΧΙ

Ασκ. 22

$E=\{1,2,3\}$

$$
P=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$P(X_0=i)=\frac{1}{3}$ για $i=1,2,3$

$P(X_2=2)=;$

$P(X_1=3, X_2=1, X_3=1, X_4=3)=;$

Λύση

$p^{(n)}=p^{(0)}P^n$

Εδώ: $p^{(2)}=p^{(0)}P^2$

$$\big(P(X_2=1)\ \ P(X_2=2)\ \ P(X_2=3)\big)=\left(\tfrac{1}{3}\ \ \tfrac{1}{3}\ \ \tfrac{1}{3}\right)P^2$$

2ος τρόπος

$$P(X_2=2)=p_1^{(0)}p_{12}^{(2)}+p_2^{(0)}p_{22}^{(2)}+p_3^{(0)}p_{32}^{(2)}$$

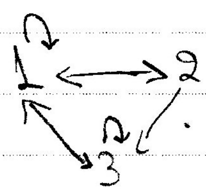
Βοηθ.: $p_{12}^{(2)}=P\left(1 \begin{array}{l}\to 1\to 2\\ \to 2\to 2\\ \to 3\to 2\end{array}\right)=P(1\to 1\to 2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$p_{22}^{(2)}=\frac{2}{9}$ . . . και $p_{32}^{(2)}=\frac{1}{4}$

$$P=\begin{pmatrix} \text{στο 1ο βήμα να είναι στην } 3 \\ 2ο\ -\|-\ \ \ \ 1 \\ 3ο\ -\|-\ \ \ \ 1 \\ 4ο\ \ \ \ \ \ \ 3 \end{pmatrix}=\sum P(A|B_i)P(B_i)$$

$B_i=\{X_0=i\}$

$$=\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}$$



: Μη διαχωρίσιμη, θετ. επαναλ., εργοδική

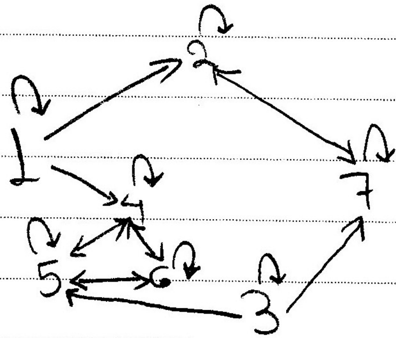
άρα από Θ. Foster: $\pi=\pi P$

$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$

Ασκ 25

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.4 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}$$



$\{4,5,6\}$: Κλ. κλειστή, Θετ. επαναλ.

$\{2,7\}$: Κλ. κλειστή, Θετ. επαναλ.

$1 \to 4$ και $4 \not\to 1$ άρα 1 παροδική

$3 \to 7$ και $7 \not\to 3$ άρα 3 παροδική

άρα $\pi_1 = \pi_3 = 0$

$$(\pi_4 \ \ \pi_5 \ \ \pi_6) = (\pi_4 \ \ \pi_5 \ \ \pi_6) P_1$$

$$\pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1$$

$$(\pi_2 \ \ \pi_7) = (\pi_2 \ \ \pi_7) \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\pi_2 + \pi_7 = 1$$

Ασκ. 28, 32, 33, 38, 40, 54, 57, 59, 60

Ασκ 29, 35, 43, 55 τις λύσαμε

Ασκ. 52, 53 → θέμα εξετάσεων

Ασκ. 52

$$P = \begin{array}{c} \\ 0\,\Pi \\ 1\,K \\ 2\,\Gamma \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \Pi & K & \Gamma \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Δευτέρα → Κ 0.3, Π 0.4, Γ 0.3

θέλω να βρω το μ_0

Foster ...

$$(\pi_0\ \pi_1\ \pi_2) = \left(\frac{12}{46}, \frac{14}{46}, \frac{20}{46}\right)$$

άρα $\mu_0 = \dfrac{1}{\pi_0} = \dfrac{46}{12}$

Άσκ. 56

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} \end{array}$$

$f_{ij}^{(n)} = ; \quad \forall i,j,n$

$f_{00}^{(n)} = ;$

$f_{01}^{(n)} = ;$

$f_{10}^{(n)} = ;$

$f_{11}^{(n)} = ;$

$f_{00}^{(1)} = P(0 \to 0) = 1-\alpha$

$f_{00}^{(2)} = P(0 \to 1 \to 0) = \alpha\beta$

$f_{00}^{(3)} = P(0 \to 1 \to 1 \to 0) = \alpha(1-\beta)\beta$

$f_{00}^{(4)} = P(0 \to 1 \to 1 \to 1 \to 0) \quad \alpha(1-\beta)^2\beta$

άρα $f_{00}^{(n)} = \alpha(1-\beta)^{n-2}\beta$

$f_{01}^{(1)} = P(0 \to 1) = \alpha$

$f_{01}^{(2)} = P(0 \to 0 \to 1) = (1-\alpha)\alpha$

$f_{01}^{(3)} = P(0 \to 0 \to 0 \to 1) = (1-\alpha)^2\alpha$

άρα $f_{01}^{(n)} = (1-\alpha)^{n-1}\alpha$

όμοια $f_{10}^{(n)} = (1-\beta)^{n-1}\alpha$

και $f_{11}^{(n)} = \beta(1-\alpha)^{n-2}\alpha$